

## 2.7 面積距定理(moment-area theorem)

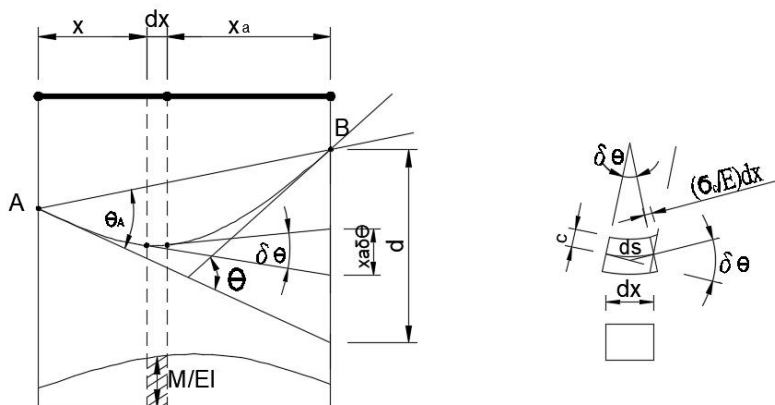


Fig.2-14 ※參考自參考文獻-2.

### 第一面積距定理 First Moment-area theorem

在彈性曲線桿上 A 和 B 點之切線之交角弧度值等於該桿上 A 和 B 點間  $M/EI$  圖的面積值. **{{2-2}}**

本定理也須建立在 微小變形 的限制下, 見 2.4.1 及 2.8.1

$$dx \sim ds = \rho \delta \theta \quad \text{Fig. 2-14}$$

$$\delta \theta = dx / \rho = k \, dx = M/EI \, dx$$

$$\theta = \int_A^B \delta \theta \, dx = \int_A^B \frac{M}{EI} \, dx = \int_A^B k \, dx \quad \text{[2-5]}$$

由於微小變形  $dx \sim ds$  之假定, 上式之物理意義為 A 和 B 點間切線之夾角  $\theta$  等於 A 和 B 點間  $M/EI$  的面積. 請注意是對原始直線梁積分. 數學上積分是用來求曲線上的面積,

### 第二面積距定理 Second Moment-area theorem

在彈性曲線桿上 A, B 點連線和 A 點之切線之兩線, 交於 B 點原始梁法線的兩點之距  $d$ , 等於該桿上 A 和 B 點間  $M/EI$  圖的面積對 B 點之彎距值 **{{2-3}}**

由於微小變形,  $dx$  小段之之變位是  $\delta \theta x_a$

$$d = \theta_A \cdot L$$

$$L = x + dx + x_a$$

**請注意** FIG. 2-14 A 和 B 點並非在相同水平線上 !!

$$d = \int_A^B x_a d\theta = \int_A^B \frac{M}{EI} x_a dx = \int_A^B k x_a dx \quad \mathbf{[2-6]}$$

上式之物理意義為

$d$  是 A 和 B 點間  $M/EI$  乘  $x_a$  之總和, 等於該桿上 A 和 B 點間  $M/EI$  圖的**全部面積**乘以形心投影到原桿的點至 B 點距之值.

### 2.7.1. 閉鎖結構 {M 2-2}

為何要強調面積矩定理呢？若 Fig. 2-14 A 和 B 點如支點 Fig. 2-1(a) 為剛接時，我們可利用存在“零”的條件等式，以 A 和 B 點的相對轉角=0 時來簡化計算。Fig. 2-17 兩端支點為剛接 fixed end 時，我們姑且稱為閉鎖結構。我們利用閉鎖結構法在記憶位移法的固定端彎矩時就不需硬記了，請參後例題 2.7-1, 2.7-2. 這是本書特有祕笈之一。

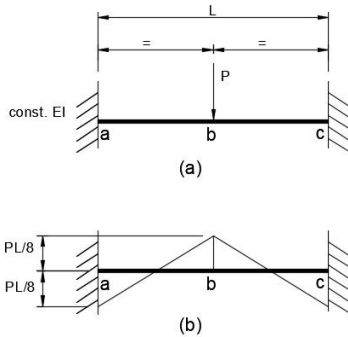


Fig.2-17

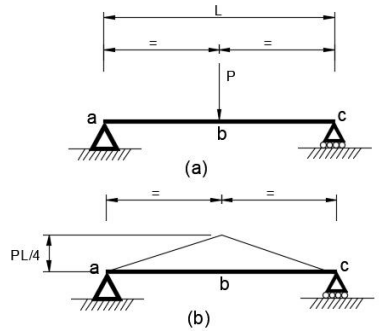


Fig.2-18

#### 例題 2.7-1

見 Fig. 2-17 請畫出 (a) 圖之彎矩圖。

解：

因點 a 及 b 邊界條件是不轉動的支點

閉鎖結構兩端不轉動的支點的切線夾角為零，所以梁上下之正負  $M/EI$  面積和為零，梁之  $M/EI$  圖上下面積相同。{M 2-2-1}

將 Fig. 2-17 看成簡支梁將 Fig. 2. 18 其最大彎距為  $PL/4$  在中點, 因端點固定 a. b 點切線相對夾角為零, 梁之  $M/EI$  圖上 下三角形面積相同, 其彎距圖可由簡支梁彎距圖下移  $PL/8$  則可, 形狀是相同的. 所以輕易知兩端點和中央之彎距為  $PL/4/2 = PL/8$  不需處理靜不定問題, 完全不需計算. 閉鎖結構法迷人吧! 而考試作題須說明原理才能拿分, 切記 !!

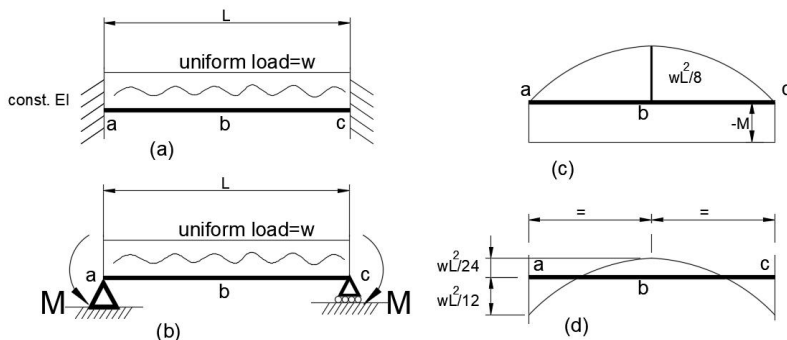


Fig.2-19

### 例題 2.7-2

見 Fig. 2-19, {M 2-2-1} and Tab. 2-1

請畫出 (a) 圖之彎距圖.

解:

設端點彎距為  $M$ , 分解成靜定結構如(b)圖

Fig. 2-19(c) 上面面積為  $(wL^2/8)L(2/3)=wL^3/12$

下面面積為  $ML$

上下等面積所以  $ML = wL^3/12$ ,  $M/EI$  梁上下面積相等

Ans: 端點  $M = wL^2/12$  中央彎距為  $wL^2/8 - wL^2/12 = wL^2/24$

利用閉鎖結構觀念 輕易得解 Fig. 2-19(d).

閉鎖結構法適用於“支點為剛接之對稱結構”。{M 2-2-2}  
對於求位移法的固定端點彎矩表 7-1 之推導很有幫助請牢記。

### 例題 2.7-3

見 Fig. 2-15 請以面積距定理求 m 點之斜率和變位值？

解：

因 微小變形  $\theta_a = d/18$

$$d = (36/EI) \times [ (6/2)(6 \times 2/3) ] +$$

$$(12/3 + 6) = 2592/EI$$

$$\text{所以 } \theta_a = 216/EI$$

$$\theta_m = \theta_a - \theta$$

$$d\theta = (27/EI) (9/2) = 243/2EI$$

$$\text{Ans: } \theta_m = 189/2EI$$

$$\delta_m = 9 \theta_a - \delta m'$$

$$\delta m' = (27/EI) (9/2) (9/3)$$

$$= 729/2EI$$

Ans:

$$\delta_m = 153/2EI$$

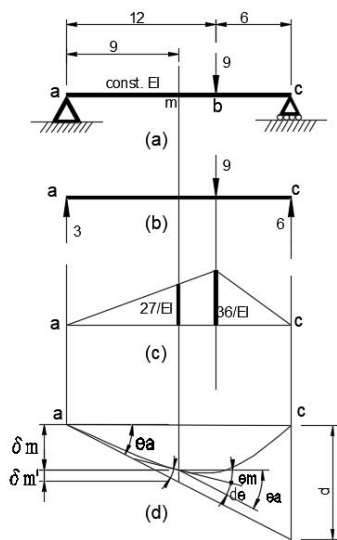


Fig.2-15